

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра цифровых технологий,
математики и экономики

Методическая разработка
к выполнению контрольной работы
«Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы ДУ»

по дисциплине: «Специальные разделы высшей математики»
название дисциплины

для направления: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

код направления (специальности)

бакалавриат, очная форма обучения

код и наименование специальности, форма обучения

Мурманск
2021

Составитель – Кацуба Валентина Сергеевна, канд. физ.-мат.наук, доцент
кафедры цифровых технологий, математики и экономики

Методическая разработка к выполнению контрольной работы рассмотрена и
одобрена на заседании кафедры-разработчика цифровых технологий, математики
и экономики

21.06.2021 г., протокол № 12 .

дата

Рецензент – Романовская Юлия Владимировна, канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики

Оглавление

1. Общие организационно-методические указания	4
2. Задание, план выполнения, требования к оформлению отчета.....	4
3. Список рекомендуемых учебных ресурсов	5
4. Образец заданий одного варианта	6
5. Пример выполнения задания.....	7
Приложение А. Варианты заданий.....	35
Приложение Б. Образец оформления титульного листа	Ошибка! Закладка не определена.1

1. Общие организационно-методические указания

Контрольная работа (КР) включает в себя основные практические задачи по модулю «Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы ДУ» дисциплины «Специальные разделы высшей математики» и предназначена для студентов второго курса направлений 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.02 «Информационные системы и технологии». КР выполняется в домашнем режиме по индивидуальным вариантам с последующей защитой в аудитории.

Целевая установка: при выполнении КР студент должен:

- показать усвоенный теоретический материал по определению основных типов дифференциальных уравнений первого и второго порядков, решаемых в квадратурах, и методам их решения;
- знать условия, при которых возможно получить единственное решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка;
- уметь практически найти общее и частное решение дифференциального уравнения или системы ДУ;
- показать достоверность решения и пояснить его графическую интерпретацию;
- иметь представление об интегральном преобразовании Лапласа и его использовании для решения обыкновенных ДУ и систем ДУ.

2. Задание, план выполнения, требования к оформлению отчета

КР содержит 6 заданий, из которых первое и третье относятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, второе - к решению систем линейных ДУ, четвертое, пятое и шестое задания – на преобразование Лапласа и его применение к решению задачи Коши для линейного ДУ и системы линейных ДУ. Для каждого задания предлагается образец его решения.

Содержание заданий каждого варианта:

Задание 1. Определить тип обыкновенного дифференциального уравнения, найти его общее решение и найти частное решение, если поставлены начальные условия (количество ДУ: 6).

Задание 2. Решить систему дифференциальных уравнений двумя методами: методом исключения и матричным методом.

Задание 3. Построить интегральные линии дифференциального уравнения первого порядка. Найти уравнение интегральной линии, проходящей через заданную точку M_0 . Проанализировать теорему существования и единственности частных решений данного ДУ.

Задание 4. Найти изображения по Лапласу функций-оригиналов, заданных при значениях $t \geq 0$

Задание 5. Восстановить несколько функций-оригиналов, если даны их изображения по Лапласу.

Задание 6. Решить операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и для системы обыкновенных ДУ; ответы подтвердить проверками.

Общие требования к оформлению КР:

- каждая задача должна иметь условие, подробное решение и ответ;
- в решении нужно ссылаться на теоретические факты (из темы КР), на основании которых строится решение (в частности, обоснованно определять тип дифференциального уравнения, согласовывая его структуру с канонической формой ДУ соответствующего типа);
- построение графиков и приведение подробных выкладок в решении обязательно (в частности, требуется в основном ручная реализация действий интегрирования);
- рекомендуется выполнять проверки решений ДУ вручную или с помощью прикладных математических пакетов.

План выполнения КР:

- КР выдается в начале прохождения модуля, выполняется по мере изучения тем модуля и сдается преподавателю практических занятий после завершения модуля на практических занятиях;
- большинство заданий КР выполняются как домашнее задание по темам, которые разбирались в аудитории;
- защитой КР является компьютерный тест по темам модуля.

3. Список рекомендуемых учебных ресурсов

1. Конспект лекций ведущего преподавателя дисциплины (в том числе в электронном виде).
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для вузов. В 2-х томах. Том 2. – М.: Интеграл-Пресс, 2002. – 440 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Рольф, 2000.– 256с.
4. Данко П.Б., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Часть II: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1997. – 416с.
5. Методическая разработка к выполнению КР «Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы ДУ» для направления 09.03.01 «ИВТ».

4. Образец заданий одного варианта

Задание 1

Определите тип дифференциального уравнения, найдите его общее решение и найдите частное решение, если поставлены начальные условия:

1.1. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln^2 x$, $y|_{x=1} = 3$;

1.2. $(3x^2 + 7y^2)dx - (4x + 6y)xdy = 0$;

1.3. $(y'')^2 = y'$, $y|_{x=1} = 3$, $y'|_{x=1} = 0$;

1.4. $2y'' - y' - y = 3xe^{-x}$, $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 2$;

1.5. $y'' - 10y' + 25y = \frac{(x+2)e^{5x}}{x^2 - 1}$;

1.6. $y'' + 2y' + 26y = \cos 5x - 2\sin 5x + 4e^{-x}$.

Задание 2

Решите систему линейных дифференциальных уравнений двумя методами: методом исключения и матричным методом:

$$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y \\ y'_t = -2x + 11y \end{cases}$$

Задание 3

Постройте интегральные линии дифференциального уравнения первого порядка.

Найдите уравнение интегральной линии, проходящей через заданную точку M_0 .

Проанализируйте теорему существования и единственности частных решений для данного дифференциального уравнения: $xy' = x^2 + y$, $M_0(4;1)$.

Задание 4

Найдите изображения по Лапласу функций-оригиналов, заданных при значениях $t \geq 0$:

1) $f(t) = t \cdot \sin^2 t$; 2) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 2 \\ 4, & 2 \leq t \leq 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$; 3) $f(t) = \begin{cases} t-1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 \leq t \leq 3 \end{cases}$.
 $T = 3$

Задание 5

Восстановите функции-оригиналы, если даны их изображения по Лапласу:

1) $F(p) = \frac{1-2p}{p^2+4p+20} \cdot e^{-p}$; 2) $F(p) = \frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)}$; 3) $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+9)^2}$ - с помощью свёртки.

Задание 6

Решите операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и для системы обыкновенных ДУ; ответы подтвердите проверками.

1) $x'' - x' = e^t \sigma(t-2)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$; 2) $\begin{cases} x' + 4x = y \\ y' + y = -2x, & x(0) = 2, & y(0) = 3. \end{cases}$

5. Пример выполнения задания

Задание 1

Определите тип дифференциального уравнения, найдите его общее решение и найдите частное решение, если поставлены начальные условия:

1.1. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln^2 x$, $y|_{x=1} = 3$;

1.2. $(3x^2 + 7y^2)dx - (4x + 6y)xdy = 0$;

1.3. $(y'')^2 = y'$, $y|_{x=1} = 3$, $y'|_{x=1} = 0$;

1.4. $2y'' - y' - y = 3xe^{-x}$, $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 2$;

1.5. $y'' - 10y' + 25y = \frac{(x+2)e^{5x}}{x^2-1}$;

1.6. $y'' + 2y' + 26y = \cos 5x - 2\sin 5x + 4e^{-x}$.

Решение

1.1. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln^2 x$, $y'|_{x=1} = 0$

Данное ДУ первого порядка относительно функции $y(x)$ имеет вид *обобщённого линейного уравнения* (уравнения Бернулли):

$$y' + p(x)y = y^\alpha q(x), \text{ в котором } p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = \ln^2 x, \quad \alpha = 2.$$

В соответствии с теоретическим методом решения, следует искомую функцию $y(x)$ искать в виде произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, для каждой из которых всегда получается дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\boxed{y(x) = u(x) \cdot v(x)} \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$\text{ДУ: } y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln^2 x \Leftrightarrow u' \cdot v + u \cdot v' + u \cdot v \cdot \frac{1}{x} = u^2 \cdot v^2 \cdot \ln^2 x \Leftrightarrow$$

$$u' \cdot v + u \underbrace{\left(v' + v \cdot \frac{1}{x} \right)}_0 = u^2 \cdot v^2 \cdot \ln^2 x.$$

Поскольку в решение задачи вместо одной неизвестной функции $y(x)$ введены две функции $u(x)$ и $v(x)$, то в решении появился «произвол», которым можно распорядиться удобным образом; вследствие этих рассуждений можно функцию $v(x)$ подобрать так, чтобы

выполнялось равенство $v' + v \cdot \frac{1}{x} = 0$.

$$\text{ДУ для функции } v(x): v' + v \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} + C \Leftrightarrow$$

$$\ln|v| = -\ln|x| + \ln C_1 \Leftrightarrow v = \pm \frac{C_1}{x} \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{x}};$$

в проведённых выкладках заменялось C на $\ln C_1$, где $C_1 > 0$, затем фиксировалось $\pm C_1 = 1$, что допустимо в решении линейных ДУ первого порядка.

$$\text{ДУ для функции } u(x): u' \cdot v = u^2 \cdot v^2 \cdot \ln^2 x \Leftrightarrow u' = u^2 \cdot v \cdot \ln^2 x \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = u^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x$$

\Leftrightarrow

$$\left[\begin{array}{l} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{x} \ln^2 x \cdot dx \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{1}{x} \ln^2 x dx + C \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = \frac{\ln^3 x}{3} + C \Leftrightarrow u = \frac{-3}{\ln^3 x + 3C} \\ u = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u = \frac{-3}{\ln^3 x + C}} \text{ или } u = 0 \text{ (сделано переобозначение } 3C \text{ на } C).$$

Перемножением функций $u(x)$ и $v(x)$ находим общее решение данного ДУ:

$$\boxed{y = u \cdot v = \left(\frac{-3}{\ln^3 x + C} \right) \cdot \frac{1}{x}}$$

Если рассмотреть случай $u(x) = 0$, который выделялся на этапе разделения переменных в решении ДУ относительно функции u , то получим функцию $\boxed{y = 0}$, которая удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению, но является его особым решением, так как ни при каком значении постоянной C эта функция не получается из найденного общего решения.

Решаем задачу Коши:

так как имеем начальное условие $y|_{x=1} = 3$, то подставляем $x = 1$ и $y = 3$ в общее решение и находим значение произвольной постоянной C , при котором будет удовлетворяться это начальное условие:

$$3 = \left(\frac{-1}{\frac{1}{3} \ln^3 1 + C} \right) \frac{1}{1} \Leftrightarrow 3 = -\frac{1}{C} \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3};$$

возвращая это значение C в общее решение, получаем искомое частное решение:

$$y = \left(\frac{-3}{\ln^3 x - \frac{1}{3}} \right) \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow \boxed{y(x) = \left(\frac{-9}{3 \ln^3 x - 1} \right) \cdot \frac{1}{x}}$$

Заметим, что особое решение $y = 0$ не удовлетворяет поставленному начальному условию, поэтому получаем только одну интегральную линию, проходящую на плоскости XOY через точку $M_0(1;3)$.

Ответ по задаче 1.1: 1) $y(x, C) = \left(\frac{-3}{\ln^3 x + C}\right) \cdot \frac{1}{x}$ - общее решение,
 $y = 0$ - особое решение данного ДУ;

2) $y(x) = \left(\frac{-9}{3\ln^3 x - 1}\right) \cdot \frac{1}{x}$ - частное решение,
удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1} = 3$.

1.2. $(3x^2 + 7y^2) dx - (4x + 6y)x dy = 0$

Преобразуем данное ДУ к каноническому виду ДУ первого порядка, чтобы определить его тип:

$$(3x^2 + 7y^2)dx - (4x + 6y)x dy = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 7y^2)dx = (4x + 6y)x dy \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 7y^2}{(4x + 6y)x} \Leftrightarrow y' = \frac{3 + 7\frac{y^2}{x^2}}{4 + 6\frac{y}{x}} \text{ - однородное ДУ первого порядка относительно}$$

функции $y(x)$, так как имеет вид $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Теоретический метод решения: заменить $\frac{y}{x} = z(x)$, тогда $y = x \cdot z(x)$, $y' = z + x \cdot z'$.

Выполняем эту замену в однородном ДУ и получаем ДУ с разделяющимися переменными относительно функции $z(x)$:

$$y' = \frac{3 + 7\frac{y^2}{x^2}}{4 + 6\frac{y}{x}} \Leftrightarrow z + x \cdot z' = \frac{3 + 7\frac{x^2 \cdot z^2}{x^2}}{4 + 6\frac{x \cdot z}{x}} \Leftrightarrow z + x \cdot z' = \frac{3 + 7z^2}{4 + 6z} \Leftrightarrow x \cdot z' = \frac{3 + 7z^2}{4 + 6z} - z$$

$$\Leftrightarrow x \cdot z' = \frac{3 + 7z^2 - 4z - 6z^2}{4 + 6z} \Leftrightarrow x \cdot z' = \frac{3 - 4z + z^2}{4 + 6z} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{3 - 4z + z^2}{4 + 6z} \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{(4 + 6z)}{3 - 4z + z^2} dz = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{(4 + 6z)}{3 - 4z + z^2} dz = \int \frac{dx}{x} + C \right. \bigcirc$$

$3 - 4z + z^2 = 0$ - это равенство может давать особые решения

вычисление интеграла, стоящего в левой части равенства:

$$\int \frac{6z + 4}{3 - 4z + z^2} dz = \int \frac{(2z - 4) \cdot 3 + 16}{3 - 4z + z^2} dz = 3 \int \frac{d(z^2 - 4z + 3)}{z^2 - 4z + 3} dz + 16 \int \frac{d(z - 2)}{(z - 2)^2 - 1} =$$

$$3\ln|z^2 - 4z + 3| + 16 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-2-1}{z-2+1} \right| = 3\ln|(z-1)(z-3)| + 8\ln \left| \frac{z-3}{z-1} \right| =$$

$$3\ln|z-1| + 3\ln|z-3| + 8\ln|z-3| - 8\ln|z-1| = 11\ln|z-3| - 5\ln|z-1|;$$

○ $11\ln|z-3| - 5\ln|z-1| = \ln|x| + C$ - это общий интеграл ДУ относительно функции $z(x)$.

Выполняем обратную замену, подставив в общий интеграл $z = \frac{y}{x}$:

$$11\ln \left| \frac{y}{x} - 3 \right| - 5\ln \left| \frac{y}{x} - 1 \right| = \ln|x| + C \Leftrightarrow 11\ln \left| \frac{y-3x}{x} \right| - 5\ln \left| \frac{y-x}{x} \right| = \ln|x| + C .$$

Нахождение общего решения $y(x, C)$ из последнего равенства затруднительно, поэтому для ответа ограничимся общим интегралом, но преобразуем его к более простому виду без логарифмов:

$$11\ln|y-3x| - 11\ln|x| - 5\ln|y-x| + 5\ln|x| = \ln|x| + C \Leftrightarrow$$

$$11\ln|y-3x| - 5\ln|y-x| = 7\ln|x| + \ln C_1, \text{ где } C_1 > 0 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{(y-3x)^{11}}{(y-x)^5} \right| = \ln |C_1 x^7| \Leftrightarrow$$

$$\frac{(y-3x)^{11}}{(y-x)^5} = \pm C_1 x^7 \Leftrightarrow \boxed{(y-3x)^{11} = C x^7 (y-x)^5, C \neq 0}, \text{ где } C = \pm C_1 .$$

Дополнительно разберёмся с равенством $3 - 4z + z^2 = 0$, которое получалось на этапе разделения переменных в решении ДУ относительно функции z ; это равенство может дать особые решения исходного ДУ:

$$3 - 4z + z^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 3 \\ \frac{y}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y = x \end{cases} ;$$

чтобы проверить, являются ли эти функции решениями исходного ДУ, их следует подставить в первоначальное уравнение «до делений»:

$$(3x^2 + 7y^2)dx = (4x + 6y)xdy \quad \Rightarrow \quad (3x^2 + 7 \cdot 9x^2)dx = (4x + 6 \cdot 3x)x \cdot 3dx \Leftrightarrow$$

$y=3x, dy=3dx$

$$66x^2 dx = 66x^2 dx \text{ - верно при любых } x \Rightarrow$$

функция $y = 3x$ удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению, следовательно, является его решением; сопоставив это решение с общим интегралом данного ДУ, видим, что оно получается из общего интеграла при значении $C = 0$; поэтому функция $y = 3x$ особым решением не является, но в общий интеграл следует подключить значение $C = 0$.

Аналогично функцию $y = x$ подставим в исходное ДУ «до делений»:

$$(3x^2 + 7y^2)dx = (4x + 6y)xdy \quad \Rightarrow \quad (3x^2 + 7 \cdot x^2)dx = (4x + 6 \cdot x)x \cdot dx \Leftrightarrow$$

$y=x, dy=dx$

$$10x^2 dx = 10x^2 dx - \text{верно при любых } x \Rightarrow$$

функция $y = x$ также является решением исходного ДУ; но эта функция не получается из общего интеграла ни при каком числовом значении произвольной постоянной C ; поэтому функцию $y = x$ следует записать в ответ как особое решение.

Ответ по задаче 1.2: $\left[\begin{array}{l} (y-3x)^{11} = Cx^7(y-x)^5, \text{ где } C \in \mathbb{R} - \text{общий интеграл,} \\ y = x - \text{особое решение.} \end{array} \right.$

1.3. $(y'')^2 = y', \quad y|_{x=1} = 3, \quad y'|_{x=1} = 0$

Имеем ДУ второго порядка относительно функции $y(x)$, которое относится к типу ДУ, допускающих понижение порядка, так как не содержит в явном виде аргумент x (теоретический вид дифференциальных уравнений этого типа такой: $F(y, y', y'') = 0$).

В соответствии с теоретическим методом решения выполняем следующую замену: $y'_x = z(y)$
 $\Rightarrow y''_x = (z(y))'_x = z'_y \cdot y'_x \Rightarrow y''_x = z'_y \cdot z$.

ДУ: $(y'')^2 = y' \Leftrightarrow (z'_y \cdot z)^2 = z \Leftrightarrow (z'_y)^2 \cdot z^2 = z \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} z'_y = \frac{1}{\sqrt{z}} - \text{ДУ с разделяющимися переменными} \\ z = 0 \Rightarrow y = \text{const}; \end{array} \right.$$

решаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$z'_y = \frac{1}{\sqrt{z}} \Leftrightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{1}{\sqrt{z}} \Leftrightarrow \sqrt{z} dz = dy \Leftrightarrow \int \sqrt{z} dz = \int dy + C \Leftrightarrow \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = y + C \Leftrightarrow$$

$$z^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} y + C_1 \Rightarrow z(y) = \left(\frac{3}{2} y + C_1 \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{в выкладках заменено } \frac{2}{3} C = C_1).$$

Так как $z(y) = y'_x$, то получено, что $y'_x = \left(\frac{3}{2} y + C_1 \right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{3}{2} y + C_1 \right)^{\frac{2}{3}}$.

это ДУ I порядка с разделяющимися переменными относительно функции $y(x)$, имеющее тип «с разделяющимися переменными»; разделяем переменные и интегрируем обе части равенства с добавлением постоянной:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dy}{\left(\frac{3}{2}y+C_1\right)^{\frac{2}{3}}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\left(\frac{3}{2}y+C_1\right)^{\frac{2}{3}}} = \int dx + C_2 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}y+C_1\right)^{\frac{1}{3}} = x + C_2 \Leftrightarrow \\ \frac{3}{2}y + C_1 = 0 \Rightarrow y = const; \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{3}{2}y + C_1\right)^{\frac{1}{3}} = x + C_2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}y + C_1 = \left(\frac{x}{2} + \frac{C_2}{2}\right)^3 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2} + \frac{C_2}{2}\right)^3 - \frac{2}{3}C_1;$$

сделаем переобозначение произвольных постоянных C_1 и C_2 , включив в них постоянные множители: $\frac{C_2}{2}$ заменим на C_2 и $-\frac{2}{3}C_1$ - на C_1 ; в результате получим общее решение исходного ДУ в следующем виде:

$$\boxed{y(x, C_1, C_2) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2} + C_2\right)^3 + C_1.}$$

Функция $y = const$, которая дважды получалась в процессе решения, удовлетворяет исходному ДУ и является его особым решением, так как не получается из общего решения ни при каких значениях постоянных C_1 и C_2 .

Решаем задачу Коши:

$y(1) = 3$, $y'(1) = 0$ - эти начальные условия подставляем в общее решение и в его производную:

$$y' = \frac{2}{3} \cdot 3 \left(\frac{x}{2} + C_2\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow y' = \left(\frac{x}{2} + C_2\right)^2;$$

$$y'(1) = 0 \Rightarrow 0 = \left(\frac{1}{2} + C_2\right)^2 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2};$$

$$y(1) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + C_2\right)^3 + C_1 \Rightarrow C_1 = 3;$$

подставляем найденные значения C_1 и C_2 в общее решение и получаем искомое частное

решение: $\boxed{y = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)^3 + 3.}$

Заметим, что поставленным начальным условием можно удовлетворить и особым решением: если $y = const$, то $y(1) = 3$ и $y'(1) = 0$; тогда получаем и особое частное решение $\boxed{y = 3}$.

Таким образом, через заданную точку $M_0(1;3)$ проходят две интегральные линии данного дифференциального уравнения второго порядка.

Ответ по задаче 1.3: 1) $y(x, C_1, C_2) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2} + C \right)^3 + C_2$ - общее решение,
 $y = const$ - особое решение;
 2) $y(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 3$ и $y = 3$ - искомые частные решения.

1.4. $2y'' - y' - y = 3x e^x, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 2$

Имеем дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $y(x)$; его тип определяем как *линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами*, так как структура данного ДУ согласуется с канонической формой $y'' + p y' + q y = f(x)$, в которой коэффициенты p, q - это числа, $f(x) = 3x e^x$.

На основании теоремы об общем решении дифференциального уравнения указанного типа, общее решение данного ДУ ищем в виде $y = y_0 + \tilde{y}$,
 где y_0 - это общее решение соответствующего однородного ДУ,
 \tilde{y} - какое-нибудь частное решение данного неоднородного ДУ.

Найдем y_0 : $2y'' - y' - y = 0$ - однородное ДУ, соответствующее данному неоднородному ДУ; на основании теоремы об общем решении линейного однородного ДУ имеем, что

$$y_0 = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x),$$

где c_1 и c_2 - это произвольные постоянные, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - фундаментальная система частных решений (ФСЧР) этого однородного ДУ.

ФСЧР для линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами находится с помощью его характеристического уравнения:

$$2k^2 - k - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -0,5 \end{cases} \text{ - корни действительные различные } \Rightarrow$$

$$\text{ФСЧР: } \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{-0,5x} \end{cases} \Rightarrow y_0(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-0,5x}.$$

Найдём \tilde{y} : сначала анализируем правую часть исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ) с целью установить, имеет ли она специальный вид:

$$f(x) = 3x e^x \text{ - подходит под первый специальный вид } e^{\alpha x} \cdot P_n(x),$$

в котором $\alpha = 1$, $P_1(x) = 3x$; при этом коэффициент α совпадает с одним из корней характеристического уравнения: $\alpha = k_1 \neq k_2$.

В соответствии с теоретической рекомендацией, частное решение ЛНДУ с такой правой частью ищем в следующем виде:

$$\tilde{y} = e^{\alpha x} \cdot Q_1(x) \cdot x \Rightarrow \tilde{y} = e^x \cdot (Ax + B) \cdot x.$$

Неопределённые коэффициенты A и B находим из условия, что \tilde{y} удовлетворяет исходному ЛНДУ; при этом нахождение производных \tilde{y}' , \tilde{y}'' и подстановку их в исходное ДУ выполняем в следующей удобной схеме:

$$\begin{array}{l|l} -1 & \tilde{y} = e^x \cdot (Ax^2 + Bx) \\ -1 & \tilde{y}' = e^x \cdot (Ax^2 + Bx + 2Ax + B) \\ 2 & \tilde{y}'' = e^x \cdot (Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A) \end{array}$$

так как $2\tilde{y}'' - \tilde{y}' - \tilde{y} \equiv 3x \cdot e^x$,

$$\text{то } e^x(x^2 \underbrace{(-A - A + 2A)}_0) + x^1 \underbrace{(-B - B - 2A + 2B + 4A + 4A)}_{6A} + x^0 \underbrace{(-B + 2B + 2B + 4A)}_{3B + 4A} \equiv 3x \cdot e^x$$

$$\Leftrightarrow 6Ax + (3B + 4A) \equiv 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 6A = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ 3B + 4A = 0 \Rightarrow 3B = -2 \Rightarrow B = -\frac{2}{3}; \end{cases}$$

таким образом получено, что $\tilde{y}(x) = e^x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\right)$.

Выполним проверку найденного частного решения, используя ту же схему для записи вычислений:

$$\begin{array}{l|l} -1 & \tilde{y} = e^x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\right) \\ -1 & \tilde{y}' = e^x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + x - \frac{2}{3}\right) = e^x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right) \\ 2 & \tilde{y}'' = e^x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + x - \frac{2}{3} + x - \frac{2}{3} + 1\right) = e^x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) \end{array}$$

$2\tilde{y}'' - \tilde{y}' - \tilde{y} = e^x \cdot (x^2 \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1) + x \cdot (\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3}) + x^0 \cdot (\frac{2}{3} - \frac{2}{3})) = e^x \cdot 3x$ - верно, следовательно, частное решение \tilde{y} найдено правильно.

Общее решение исходного ЛНДУ находим суммированием y_0 и \tilde{y} :

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-0,5x} + e^x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\right).$$

Решаем задачу Коши:

$$\begin{cases} y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-0,5x} + e^x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\right) \\ y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 2 \end{cases}$$

подставляя поочерёдно начальные условия в общее решение и его производную, получаем систему уравнений для определения значений постоянных c_1 и c_2 :

$$\begin{cases} c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-0,5 \cdot 0} + e^0 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{2}{3} \cdot 0) = 0 \\ c_1 \cdot e^0 - \frac{1}{2} c_2 \cdot e^{-0,5 \cdot 0} + e^0 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{2}{3} \cdot 0 + 0 - \frac{2}{3}) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - \frac{1}{2} c_2 - \frac{2}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \mid \cdot \frac{1}{2} \\ c_1 - \frac{1}{2} c_2 = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} c_1 = \frac{8}{3} \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{16}{9} \\ c_2 = -\frac{16}{9} \end{cases};$$

возвращаем числовые значения c_1 и c_2 в общее решение и получаем искомое частное решение, то есть такое частное решение, которое соответствует поставленным начальным условиям:

$$\boxed{y(x) = \frac{16}{9} \cdot e^x - \frac{16}{9} e^{-0,5x} + e^x \cdot (\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x)}.$$

Ответ по задаче 1.4: $y(x, c_1, c_2)_{\text{общее}} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-0,5x} + e^x \cdot (\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x);$
 $y(x)_{\text{частное}} = \frac{16}{9} \cdot e^x - \frac{16}{9} e^{-0,5x} + e^x \cdot (\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x).$

1.5. $y'' - 10y' + 25y = \frac{(x+2)e^{5x}}{x^2-1}$

Имеем *линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами* и правой частью, вид которой не является специальным (каноническая форма такого ДУ была приведена в задаче 1.4).

Теоретический метод решения: $\boxed{y = y_0 + \tilde{y}},$

где y_0 - общее решение соответствующего однородного ДУ,

\tilde{y} - какое-нибудь частное решение данного неоднородного ДУ.

Найдем y_0 : $y'' - 10y' + 25y = 0$ - ЛОДУ с постоянными коэффициентами \Rightarrow

$$\boxed{y_0 = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2}, \text{ где } y_1(x), y_2(x) \text{ - ФСЧР, } c_1, c_2 \text{ - произвольные постоянные;}$$

ФСЧР составляем по корням характеристического уравнения:

$$k^2 - 10k + 25 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 5 \text{ - случай равных действительных корней } \Rightarrow$$

$$\text{ФСЧР: } y_1(x) = e^{5x}, y_2(x) = x \cdot e^{5x} \Rightarrow \boxed{y_0 = c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot x \cdot e^{5x}}.$$

Найдём \tilde{y} методом вариации произвольных постоянных, так как правая часть данного ЛНДУ не относится к функциям, имеющим специальный вид. Суть метода вариации состоит в том,

что функцию \tilde{y} берём в таком же виде, в котором получилась функция y_0 , но произвольные постоянные c_1 и c_2 заменяем на функции от x :

$$\tilde{y} = c_1(x) \cdot e^{5x} + c_2(x) \cdot x \cdot e^{5x}$$

В соответствии с теоретической разработкой этого метода, производные функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$ следует определять из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} c_1' \cdot y_1 + c_2' \cdot y_2 = 0 \\ c_1' \cdot y_1' + c_2' \cdot y_2' = f(x) \end{cases},$$

здесь $y_1(x)$, $y_2(x)$ - ФСЧР соответствующего ЛОДУ,
 $f(x)$ - правая часть данного ЛНДУ.

Составляем эту систему для данного ДУ, упрощаем её и находим её решение (существование и единственность которого гарантируется теорией метода вариации), используя, например, формулы Крамера:

$$\begin{cases} c_1' \cdot e^{5x} + c_2' \cdot e^{5x} \cdot x = 0 \\ c_1' \cdot e^{5x} \cdot 5 + c_2' \cdot e^{5x} \cdot (5x+1) = \frac{(x+2) \cdot e^{5x}}{x^2-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1' + c_2' \cdot x = 0 \\ c_1' \cdot 5 + c_2' \cdot (5x+1) = \frac{x+2}{x^2-1} \end{cases} : e^{5x}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 5 & (5x+1) \end{vmatrix} = (5x+1) - 5x = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{система имеет единственное решение,}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{(x+2)}{x^2-1} & (5x+1) \end{vmatrix} = -\frac{x \cdot (x+2)}{x^2-1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & \frac{(x+2)}{x^2-1} \end{vmatrix} = \frac{x+2}{x^2-1} \Rightarrow$$

$c_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{x \cdot (x+2)}{x^2-1}$, $c_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{x \cdot (x+2)}{x^2-1}$ - это и есть решение системы, которое всегда следует подтвердить проверкой.

Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ восстанавливаются по их найденным производным с помощью неопределённого интеграла:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int c_1'(x) \cdot dx = -\int \frac{x(x+2)}{x^2-1} dx = -\int \frac{(x^2+2x+1)-1}{(x-1) \cdot (x+1)} dx = -\int \left(\frac{(x+1)^2}{(x-1) \cdot (x+1)} - \frac{1}{x^2-1} \right) dx \\ &= -\int \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) dx = -\int \left(\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= -\int \left(1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) dx = -x - 2\ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c_1^* =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - x - \ln(x-1)^2 + c_1^* = c_1(x)}, \text{ где } c_1^* \text{ - константа интегрирования;}$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) \cdot dx = \int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{x}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{(x-1)+1}{(x-1) \cdot (x+1)} + \frac{2}{x^2-1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x^2-1} \right) dx =$$

$$= \boxed{\ln|x+1| + 3 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c_2^* = c_2(x)}, \text{ где } c_2^* \text{ - константа интегрирования.}$$

Найденные функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ подставляем в формулу для \tilde{y} и получаем:

$$\tilde{y}(x) = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - x - \ln(x-1)^2 + c_1^* \right) \cdot e^{5x} + \left(\ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c_2^* \right) \cdot x \cdot e^{5x};$$

так как \tilde{y} - это какое-нибудь частное решение ЛНДУ, то константами интегрирования c_1^* и c_2^* можно распорядиться удобным образом, например, положить их равными нулю; в результате функция \tilde{y} упростится к следующему виду:

$$\boxed{\tilde{y}(x) = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - x - \ln(x-1)^2 \right) \cdot e^{5x} + \left(\ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \cdot x \cdot e^{5x}.}$$

Общее решение исходного ЛНДУ находим суммированием функций y_0 и \tilde{y} с дальнейшими упрощениями полученного выражения.

Ответ по задаче 1.5:

$$y(x, c_1, c_2) = \left(\left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - x - \ln(x-1)^2 \right) + \left(\ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \cdot x + c_1 + c_2 \cdot x \right) \cdot e^{5x}.$$

1.6. $y'' + 2y' + 26y = \cos 5x - 2\sin 5x + 4e^{-x}$

Данное дифференциальное уравнение второго порядка имеет тип линейного неоднородного ДУ (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами. Уравнение такого типа уже встречалось в выполняемом задании, поэтому можно его каноническую форму не приводить и суть метода решения подробно не описывать. Ниже приводится краткое решение этого ДУ:

- 1) $y_{\text{общее}} = y_0 + \tilde{y}$, где y_0 - общее решение соответствующего ЛОДУ,
 \tilde{y} - какое-нибудь частное решение данного ЛНДУ;

- 2) находим y_0 : $y'' + 2y' + 26y = 0 \Rightarrow y_0 = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$,
 где $y_1(x), y_2(x)$ - это ФСЧР, c_1, c_2 - произвольные постоянные;

ФСЧР находим с помощью характеристического уравнения:

$$k^2 + 2k + 26 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = -1 \pm 5i \text{ - комплексно-сопряжённые корни}$$

$$\Rightarrow \text{ФСЧР: } y_1(x) = e^{-x} \cos 5x, \quad y_2(x) = e^{-x} \sin 5x \Rightarrow y_0(x, c_1, c_2) = e^{-x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x);$$

- 3) находим \tilde{y} : $f(x) = \cos 5x - 2\sin 5x + 4e^{-x} = f_1(x) + f_2(x)$, где
 $f_1(x) = \cos 5x - 2\sin 5x$ - подходит под второй специальный вид, так как имеет структуру выражения $e^{\alpha x}(M \cos \beta x + N \sin \beta x)$, в котором $\alpha = 0, \beta = 5$,
 $f_2(x) = 4e^{-x}$ - подходит под первый специальный вид, так как имеет структуру выражения $e^{\alpha x}P_n(x)$, в котором $\alpha = -1, n = 0$.

В этом случае нужно использовать *метод суперпозиции частных решений* ЛНДУ, в соответствии с которым частное решение \tilde{y} нужно искать в виде суммы двух функций

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2, \text{ где } \tilde{y}_1 \text{ - это частное решение ЛНДУ } y'' + 2y' + 26y = f_1(x), \\ \tilde{y}_2 \text{ - это частное решение ЛНДУ } y'' + 2y' + 26y = f_2(x).$$

Так как обе правые части $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют специальный вид, то каждая из функций $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ наиболее просто находится методом неопределённых коэффициентов. Поочерёдно находим эти функции, подбирая их вид в соответствии с теоретическими рекомендациями:

$$\tilde{y}_1 = A \cos 5x + B \sin 5x, \text{ так как } \alpha = 0, \beta = 5 \Rightarrow \alpha \pm i\beta \neq k_{1,2};$$

$$\text{подстановкой } \tilde{y}_1 \text{ в ЛНДУ с правой частью } f_1(x) \text{ находим } A = \frac{21}{101}, B = \frac{8}{101};$$

$$\tilde{y}_2 = Ae^{-x}, \text{ так как } \alpha = -1 \neq k_{1,2};$$

$$\text{подстановкой } \tilde{y}_2 \text{ в ЛНДУ с правой частью } f_2(x) \text{ находим } A = \frac{4}{25};$$

сложением найденных функций \tilde{y}_1 и \tilde{y}_2 определяем частное решение $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}(x) = \frac{21}{101} \cos 5x + \frac{8}{101} \sin 5x + \frac{4}{25} e^{-x}.$$

- 4) После определения функций y_0 и \tilde{y} составляем общее решение исходного ЛНДУ по формуле $y = y_0 + \tilde{y}$ и упрощаем функцию $y(x, c_1, c_2)$ к более лаконичному виду.

$$\text{Ответ по задаче 1.6: } y(x, c_1, c_2) = e^{-x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + \frac{4}{25}) + \frac{1}{101}(21 \cos 5x + 8 \sin 5x).$$

Задание 2

Решить систему дифференциальных уравнений двумя методами: методом исключения и матричным методом:

$$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y \\ y'_t = -2x + 11y \end{cases}$$

Решение

Имеем систему двух обыкновенных ДУ первого порядка относительно функций $x(t)$ и $y(t)$. Реализуем решение системы *методом исключения одной из функций*, в результате получим ДУ второго порядка относительно другой функции. Будем исключать функцию $y(t)$, а функцию $x(t)$ оставим. Для этого первое уравнение системы дифференцируем по t :

$$x''_t = 5x' + 4y';$$

подставляем производную y' , взятую из второго уравнения системы $y'_t = -2x + 11y$:

$$x''_t = 5x' + 4(-2x + 11y) \Leftrightarrow x''_t = 5x' - 8x + 44y;$$

берем функцию y из первого уравнения исходной системы $y = \frac{x' - 5x}{4}$ и подставляем в последнее равенство:

$$x'' = 5x' - 8x + 44 \cdot \frac{x' - 5x}{4} \Leftrightarrow x'' - 16x' + 63x = 0;$$

исключение функции $y(t)$ состоялось и в результате получено ДУ второго порядка относительно только функции $x(t)$.

Находим функцию $x(t)$ как общее решение получившегося ДУ второго порядка, тип которого определяется как ЛОДУ с постоянными коэффициентами:

$$x'' - 16x' + 63x = 0 \Rightarrow x_{\text{общее}} = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \text{ где } x_1(t), x_2(t) - \text{ это ФСЧР};$$

$$\text{характеристическое уравнение: } k^2 - 16k + 63 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 7, k_2 = 9;$$

$$\text{ФСЧР: } x_1(t) = e^{7t}, x_2(t) = e^{9t} \Rightarrow \boxed{x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{7t} + c_2 e^{9t}}.$$

Ищем вторую функцию $y(t)$, используя первое уравнение исходной системы $y = \frac{x' - 5x}{4}$ и подставляя в него найденную функцию $x(t, c_1, c_2)$:

$$y = \frac{1}{4}(7c_1 e^{7t} + 9c_2 e^{9t} - 5(c_1 e^{7t} + c_2 e^{9t})) \Leftrightarrow \boxed{y(t, c_1, c_2) = 0,5c_1 e^{7t} + c_2 e^{9t}}.$$

Правильность найденных искомым функций всегда можно подтвердить проверкой.

Так как данная система состоит из линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то её можно представить и решить *в матричной форме*:

$$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y \\ y'_t = -2x + 11y \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{X'_t = A \cdot X(t)}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы ЛОДУ второго порядка по аналогии с одним уравнением такого же типа составляется как линейная комбинация частных решений системы, которые являются линейно независимыми:

$X(t) = c_1 \cdot X_1(t) + c_2 \cdot X_2(t)$, $X_2(t) \neq const \cdot X_1(t)$, c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Так же, как и в случае одного ЛОДУ с постоянными коэффициентами, частные решения системы ищутся в виде экспонент:

$$x(t) = \alpha_1 \cdot e^{kt}, \quad y(t) = \alpha_2 \cdot e^{kt} \Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot e^{kt} \Rightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot ke^{kt}.$$

Подставляем $X(t)$ и $X'(t)$ в систему, записанную в матричной форме, и проводим преобразования с целью получить условия на параметры взятых экспонент:

$$X'_t = A \cdot X(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot ke^{kt} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot e^{kt} \Leftrightarrow (A - kE) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученное матричное равенство представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно числовых величин α_1, α_2 . Из алгебры известно, что такая система имеет нетривиальное (ненулевое) решение только в случае, когда её определитель равен нулю, то есть

$$\det(A - kE) = 0.$$

Это равенство называется характеристическим уравнением системы ЛОДУ с постоянными коэффициентами, оно определяет значения параметра k в экспонентах. После решения этого уравнения нужно находить величины α_1, α_2 как решения однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Составляем характеристическое уравнение для рассматриваемой системы и решаем его:

$$\det \begin{pmatrix} 5-k & 4 \\ -2 & 11-k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-k) \cdot (11-k) + 8 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 16k + 63 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 7 \\ k_2 = 9 \end{cases}.$$

При $k_1 = 7$ составляем и решаем систему относительно α_1, α_2 , в результате получаем $X_1(t)$:

$$(A - kE) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \forall \text{число} \\ \alpha_2 = 0,5\alpha_1 \end{cases};$$

так как числа α_1, α_2 используются для построения частного решения $X_1(t)$, то можно взять

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,5 \Rightarrow X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot e^{7t}.$$

При $k_2 = 9$ аналогично получаем частное решение $X_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \forall \text{число} \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{9t}.$$

Составляем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ X(t) = c_1 \cdot X_1(t) + c_2 \cdot X_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot e^{7t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{9t} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{7t} + c_1 e^{9t} \\ y(t) = 0,5 c_1 e^{7t} + c_1 e^{9t} \end{cases}$$

Понятно, что оба рассмотренных метода решения данной системы дифференциальных уравнений должны приводить к одинаковым результатам.

Ответ по заданию 2:
$$\begin{cases} x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{7t} + c_2 e^{9t} \\ y(t, c_1, c_2) = 0,5 c_1 e^{7t} + c_2 e^{9t} \end{cases}$$

Задание 3

Построить интегральные линии данного дифференциального уравнения первого порядка.

Найти уравнение интегральной линии, которая проходит через точку M_0 . Проанализировать теорему существования и единственности частных решений для данного ДУ:

$$xy' = x^2 + y, M_0(4;1).$$

Решение

Интегральные линии дифференциального уравнения – это графическое изображение общего решения ДУ; для дифференциального уравнения первого порядка интегральные линии представляют собой однопараметрическое семейство линий $y = y(x, c)$ на плоскости XOY .

Для построения интегральных линий находим общее решение данного ДУ:

$$xy' = x^2 + y \Leftrightarrow y' = x + \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = x \text{ - линейное ДУ вида } y' + p(x) \cdot y = f(x) \Rightarrow$$

$$\text{метод решения: } y(x) = U(x) \cdot V(x) \Leftrightarrow y'_x = U'_x \cdot V + U \cdot V'_x;$$

$$\text{ДУ: } y' - \frac{y}{x} = x \Leftrightarrow U' \cdot V + U \cdot V' - \frac{U \cdot V}{x} = x \Leftrightarrow U' \cdot V + U \cdot \left(V' - \frac{V}{x} \right) = x;$$

$$\text{ДУ для функции } V(x): V' - \frac{V}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dV}{dx} = \frac{V}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dV}{V} = \int \frac{dx}{x} + c \Leftrightarrow$$

$$\ln|V| = \ln|x| + \ln C_1 \Leftrightarrow V = \pm C_1 \cdot x \Leftrightarrow V(x) = x; \\ =1$$

$$\text{ДУ для функции } U(x): U' \cdot x = x \Leftrightarrow \frac{dU}{dx} \cdot x = x \Leftrightarrow \int dU = \int dx + C_2 \Leftrightarrow U = x + C;$$

общее решение исходного ДУ: $y = (x + C) \cdot x \Leftrightarrow \boxed{y(x, C) = x^2 + C \cdot x}$.

Геометрически общему решению соответствует однопараметрическое семейство парабол, ветви которых направлены вверх и которые пересекают ось OX в точках $x = 0$ и $x = -C$. Изменяя значения произвольной постоянной C , получим несколько интегральных линий данного ДУ (рис. 1):

если $C = 0$, то $y = x^2$ - парабола с вершиной $(0;0)$;

если $C = 1$, то $y = x^2 + x$ - парабола с вершиной $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$;

если $C = 2$, то $y = x^2 + 2x$ - парабола с вершиной $(-1; 1)$;

если $C = -1$, то $y = x^2 - x$ парабола с вершиной $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$;

заметим, что все параболы, имеющие уравнение $y = x^2 + Cx$, проходят через начало координат.

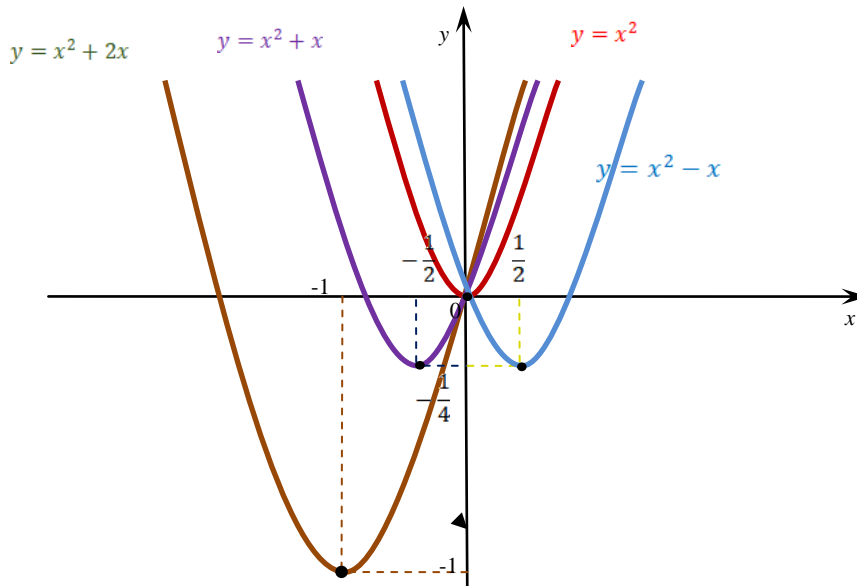
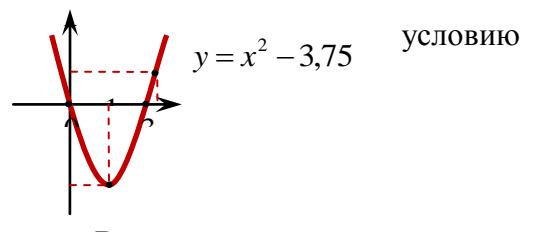


Рис. 1

Находим интегральную линию, проходящую через заданную точку $M_0(4;1)$; для этого подставим $x = 4$, $y = 1$ в найденное общее решение и определим значение C , соответствующее начальному $y|_{x=4} = 1$:

$$\begin{cases} y = x^2 + C \cdot x \\ x = 4, y = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = 16 + 4C \Rightarrow C = -\frac{15}{4} = -3,75;$$



возвращая полученное значение $C = -3,75$ в общее решение, получим частное решение данного ДУ, соответствующее поставленному начальному условию:

$$\boxed{y = x^2 - 3,75x}.$$

Геометрически этому частному решению

соответствует парабола, имеющая вершину в

точке $(1,875; -3,5)$ и проходящая через точку

$M_0(4;1)$, её изображение приведено на рис. 2.

Проанализируем теорему существования и единственности частных решений для данного ДУ первого порядка. Для этого сначала сформулируем эту теорему:

Если выполняются следующие условия:

- 1) дано ОДУ 1-го порядка, записанное в канонической форме $y' = f(x, y)$,
- 2) дана фиксированная точка $(x_0; y_0)$, которой соответствует начальное условие $y|_{x=x_0} = y_0$,
- 3) функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в точке $(x_0; y_0)$,

то существует единственное частное решение ОДУ, удовлетворяющее данному начальному условию, то есть существует единственная интегральная линия ОДУ, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Проанализируем непрерывность функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ для данного ОДУ:

$$y' = x + \frac{y}{x} \Rightarrow f(x, y) = x + \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

обе функции непрерывны для всех точек $(x; y)$, кроме тех точек, в которых $x = 0$.

По теореме существования и единственности заключаем, что:

- 1) через каждую точку (x_0, y_0) , у которой $x_0 \neq 0$, проходит единственная интегральная линия данного ОДУ;
- 2) точки $(0; y_0)$ не удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности частных решений, поэтому они являются *особыми точками* для данного ОДУ; через каждую из этих точек может проходить или несколько интегральных линий, или ни одной, но может быть и одна интегральная линия.

В данной задаче через особую точку $(0; 0)$ проходят все интегральные линии, через остальные точки $(0; y)$, у которых $y \neq 0$, не проходит ни одна интегральная линия.

Ответ по заданию 3:

1) $y(x, C) = x^2 + Cx$ - уравнение множества интегральных линий ОДУ $xy' = x^2 + y$; несколько интегральных линий построены на рис. 1;

2) $y(x) = x^2 - 3,75x$ - уравнение интегральной линии, проходящей через точку $M_0(4; 1)$; эта линия построена на рис. 2;

3) в результате анализа теоремы существования и единственности частных решений получено, что через каждую точку $M_0(x; y)$, у которой $x \neq 0$, проходит единственная интегральная линия; точки вида $(0; y)$, заполняющие полностью ось OY , являются особыми точками данного ОДУ.

Задание 4

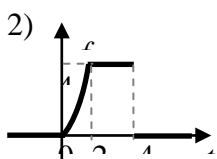
Найдите изображения по Лапласу функций-оригиналов, заданных при значениях $t \geq 0$:

$$1) f(t) = t \cdot \sin^2 t; \quad 2) f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 2 \\ 4, & 2 \leq t \leq 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}; \quad 3) f(t) = \begin{cases} t-1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 \leq t \leq 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}; \quad T = 3..$$

Решение

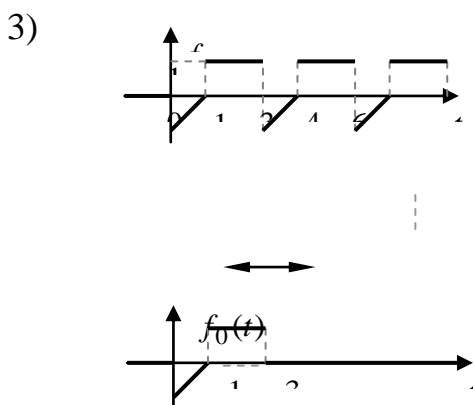
$$1) f(t) = t \cdot \sin^2 t = \frac{1}{2}(t - t \cos 2t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \left(\frac{p}{p^2 + 4} \right)' \right) = \frac{1}{2p^2} + \frac{4 - p^2}{2(p^2 + 4)^2} = F(p);$$

в решении использованы свойство линейности преобразования Лапласа, теорема о дифференцировании изображения и табличные изображения функций t , $\cos 2t$.



$$\begin{aligned} f(t) &= t^2(\sigma(t) - \sigma(t-2)) + 4(\sigma(t-2) - \sigma(t-4)) = \\ &= t^2\sigma(t) - t^2\sigma(t-2) + 4\sigma(t-2) - 4\sigma(t-4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{p^3} - \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p} \right) e^{-2p} + \frac{4}{p} e^{-2p} - \frac{4}{p} e^{-4p} = \\ &= \frac{2}{p^3} - \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} \right) e^{-2p} - \frac{4}{p} e^{-4p}. \end{aligned}$$

В решении использованы линейность преобразования Лапласа, теорема запаздывания и табличные изображения функций t^2 , t , 1 .



Составляем функцию $f_0(t)$:

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases} = \begin{cases} t-1, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t \leq 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}.$$

Записываем $f_0(t)$ с помощью функции Хевисайда и находим ее изображение $F_0(p)$:

$$\begin{aligned}
 f_0(t) &= (t-1) \cdot (\sigma(t) - \sigma(t-1)) + \sigma(t-1) - \sigma(t-3) = \\
 &= (t-1)\sigma(t) - (t-1)\sigma(t-1) + \sigma(t-1) - \sigma(t-3) \square \\
 &\square \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-p} - \frac{1}{p} e^{-3p} = \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p}) - \frac{1}{p} (1 - e^{-p} + e^{-3p}) = F_0(p).
 \end{aligned}$$

Используя формулу для изображения периодического оригинала с периодом $T = 3$, находим изображение $F(p)$ данной функции-оригинала $f(t)$:

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-Tp}} = \frac{\frac{1}{p^2}(1 - e^{-p}) - \frac{1}{p}(1 - e^{-p} + e^{-3p})}{1 - e^{-3p}}.$$

В решении использованы: линейность преобразования Лапласа, теорема запаздывания, теорема об изображении периодического сигнала, табличные изображения функций-оригиналов $t, 1$.

Ответ к заданию 4: 1) $F(p) = \frac{1}{2p^2} + \frac{4 - p^2}{2(p^2 + 4)^2}$;

2) $F(p) = \frac{2}{p^3} - \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} \right) e^{-2p} - \frac{4}{p} e^{-4p}$;

3) $F(p) = \frac{\frac{1}{p^2}(1 - e^{-p}) - \frac{1}{p}(1 - e^{-p} + e^{-3p})}{1 - e^{-3p}}$.

Задание 5

Восстановите функции-оригиналы, если даны их изображения по Лапласу:

1) $F(p) = \frac{1 - 2p}{p^2 + 4p + 20} \cdot e^{-p}$; 2) $F(p) = \frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)}$; 3) $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+9)^2}$ - с помощью свертки.

Решение

1) $F(p) = \frac{1 - 2p}{p^2 + 4p + 20} \cdot e^{-p}$;

имея в виду теорему запаздывания для дальнейшего применения, восстановим сначала оригинал для части данного изображения, которая без экспоненты:

$$F(p) = \frac{1 - 2p}{p^2 + 4p + 20} = \frac{1 - 2p}{(p+2)^2 + 16} = -2 \frac{p+2}{(p+2)^2 + 4^2} + \frac{5}{4} \frac{4}{(p+2)^2 + 4^2} \square$$

$$\square -2e^{-2t} \cos 4t + \frac{5}{4} e^{-2t} \sin 4t = e^{-2t} (-2 \cos 4t + \frac{5}{4} \sin 4t) = f(t).$$

Были использованы свойства единственности и линейности преобразования Лапласа, теорема затухания и следующие табличные соответствия оригиналов и изображений:

$$\cos(\omega t) \square \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \sin(\omega t) \square \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Теперь учтем множитель в виде экспоненты e^{-p} , который в соответствии с теоремой запаздывания означает, что восстановленный выше оригинал $f(t)$ следует записать как запаздывающий на величину $\tau = 1$:

если $F(p) \propto f(t) \cdot \sigma(t)$, то $F(p) \cdot e^{-\tau p} \propto f(t - \tau) \cdot \sigma(t - \tau)$;

поэтому для изображения $F(p) = \frac{1-2p}{p^2+4p+20} \cdot e^{-p}$ оригиналом является функция

$$f(t) = e^{-2(t-1)} \cdot (-2 \cos(4(t-1)) + \frac{5}{4} \sin(4(t-1))) \cdot \sigma(t-1).$$

$$2) F(p) = \frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)};$$

разложим данную правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)} = \frac{A(p+2)(p^2+4) + B(p^2+4) + (Cp+D)(p+2)^2}{(p+2)^2(p^2+4)} \Rightarrow$$

$$p = A(p+2)(p^2+4) + B(p^2+4) + (Cp+D)(p+2)^2 \Rightarrow$$

$$\text{при } p = -2: -2 = 8B \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4};$$

$$\begin{cases} \text{коэф. при } p^3: 0 = A + C \\ \text{коэф. при } p^2: 0 = 2A + B + 4C + D \\ \text{коэф. при } p^0: 0 = 8A + 4B + 4D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -A \\ 2A + 4C + D = \frac{1}{4} \\ 8A + 4D = 1 \Rightarrow D = \frac{1-8A}{4}; \end{cases}$$

$$\text{второе уравнение: } 2 \cdot A - 4 \cdot A + \frac{1}{4} - 2 \cdot A = \frac{1}{4} \Rightarrow -4 \cdot A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow D = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)} &= \frac{-\frac{1}{4}}{(p+2)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{p^2+4} \stackrel{\text{проверка}}{=} \frac{-\frac{1}{4}(p^2+4) + \frac{1}{4}(p^2+4p+4)}{(p+2)^2(p^2+4)} = \\ &= \frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)} - \text{верно.} \end{aligned}$$

$$F(p) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{8} \frac{2}{p^2+4} \propto -\frac{1}{4} t e^{-2t} + \frac{1}{8} \sin 2t = f(t).$$

Использованы единственность и линейность преобразования Лапласа, а также два табличных соответствия оригиналов и изображений:

$$te^{at} \square \frac{1}{(p-a)^2}, \quad \sin(\omega t) \square \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

3)

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 9)^2} = \frac{p}{p^2 + 9} \cdot \frac{p}{p^2 + 9};$$

Используем теорему об изображении свертки, суть которой состоит в том, что произведение изображений соответствует свёртке оригиналов:

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \square f_1(t) * f_2(t);$$

при этом операция свёртки функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определяется следующим интегралом:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx;$$

(существуют также таблицы свёрток, с помощью которых можно проверить правильность нахождения интеграла).

Так как известно, что $\frac{p}{p^2 + 9} \square \cos 3t$, то в рассматриваемом примере по указанной теореме получим, что для данного изображения $F(p)$ оригиналом является такая функция:

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos 3t * \cos 3t = \int_0^t \cos 3x \cdot \cos(3t-3x) dx = \frac{1}{2} \int_0^t (\cos 3t + \cos(6x-3t)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cos 3t \int_0^t dx + \frac{1}{2} \int_0^t \cos(6x-3t) dx = \frac{1}{2} \cos 3t \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sin(6x-3t) \Big|_{x=0}^{x=t} = \\ &= \frac{1}{2} \cos 3t \cdot t + \frac{1}{12} (\sin 3t - \sin(-3t)) = \frac{1}{2} \cos 3t \cdot t + \frac{1}{6} \sin 3t. \end{aligned}$$

Проверить результат нахождения свёртки можно, например, обратным действием, то есть нахождением изображения от восстановленного оригинала $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2} \cos 3t \cdot t + \frac{1}{6} \sin 3t \square -\frac{1}{2} \left(\frac{p}{p^2 + 9} \right)' + \frac{1}{6} \frac{3}{p^2 + 9} \equiv -\frac{1}{2} \frac{9-p^2}{(p^2 + 9)^2} + \frac{1}{6} \frac{3}{p^2 + 9} \equiv \frac{p^2}{(p^2 + 9)^2} = F(p). =$$

Заметим, что если в записи теоретических фактов или в выкладках опускается написание единичной функции Хевисайда, то по умолчанию понимается «включение» всех функций-оригиналов от значения $t = 0$.

Ответ к заданию 5: 1) $f(t) = e^{-2(t-1)} \cdot (-2 \cos(4(t-1)) + \frac{5}{4} \sin(4(t-1))) \cdot \sigma(t-1)$;

$$2) f(t) = \left(-\frac{1}{4} t e^{-2t} + \frac{1}{8} \sin 2t \right) \cdot \sigma(t);$$

$$3) f(t) = \cos 3t * \cos 3t = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sin 3t + t \cos 3t \right) \cdot \sigma(t).$$

Задание 6

Решите операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и для системы обыкновенных ДУ; ответы подтвердите проверками.

$$1) x'' - x' = e^t \cdot \sigma(t-2), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2. \quad 2) \begin{cases} x' + 4x = y \\ y' + y = -2x, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 3. \end{cases}$$

Решение

$$1) x'' - x' = e^t \cdot \sigma(t-2), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Будем искать изображение по Лапласу искомого частного решения ОДУ: $x(t) \square X(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала получим, что

$$\begin{aligned} x'(t) \square pX(p) - x(0) &= pX(p) - 1, \\ x''(t) \square p(pX(p) - 1) - x'(0) &= p^2X(p) - p - 2; \end{aligned}$$

здесь учтено, что $x(0) = 1$ и $x'(0) = 2$ из начальных условий.

Найдем изображение правой части дифференциального уравнения, используя теорему запаздывания: $f(t) \cdot \sigma(t-\tau) \square F(p) \Leftrightarrow f(t-\tau) \cdot \sigma(t-\tau) \square F(p) \cdot e^{-p\tau}$, которая для данной в ДУ запаздывающей правой части даёт следующий результат:

$$e^t \sigma(t) \square \frac{1}{p-1} \Rightarrow e^t \sigma(t-2) = e^2 e^{t-2} \sigma(t-2) \square e^2 \cdot \frac{1}{p-1} \cdot e^{-2p}$$

Составим и решим операционное уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению, используя при этом линейность и единственность преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} p^2X(p) - p - 2 - (pX(p) - 1) &= e^2 \cdot \frac{1}{(p-1)^2} \cdot e^{-2p} \Rightarrow X(p) \cdot (p^2 - p) = e^2 \cdot \frac{1}{p-1} \cdot e^{-2p} + p + 2 - 1 \Rightarrow \\ X(p) &= e^2 \cdot \frac{1}{p^2 - p} \cdot \frac{1}{p-1} \cdot e^{-2p} + \frac{p+1}{p^2 - p}. \end{aligned}$$

Таким образом, найдено изображение по Лапласу искомого частного решения ДУ.

Подготовим найденное изображение $X(p)$ к восстановлению оригинала, выполнив сначала разложение каждой правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(p^2 - p)(p-1)} = \frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p} + \frac{-1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}; \quad \frac{p+1}{p^2 - p} = \frac{-1}{p} + \frac{2}{p-1}.$$

Теперь для каждой из этих дробей легко восстановить оригинал, используя линейность преобразования Лапласа и табличное соответствие $e^{at} t^n \cdot \sigma(t) \square \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ при $n=0,1,2$:

$$e^2 \cdot \frac{1}{p^2 - p} \cdot \frac{1}{p-1} = e^2 \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{-1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} \right) \square e^2 (1 - e^t + e^t \cdot t) \cdot \sigma(t);$$

$$\frac{p+1}{p^2-p} = \frac{-1}{p} + \frac{2}{p-1} \Leftrightarrow (-1+2e^t) \cdot \sigma(t).$$

Но первая дробь входит в изображение $X(p)$ ещё с множителем e^{-2p} , поэтому для восстановления оригинала всего первого слагаемого в $X(p)$ нужно снова использовать теорему запаздывания (в обратную сторону):

$$e^2 \cdot \frac{1}{p^2-p} \cdot \frac{1}{p-1} \Leftrightarrow e^2(1-e^t+e^t \cdot t) \cdot \sigma(t) \Leftrightarrow$$

$$e^2 \cdot \frac{1}{p^2-p} \cdot \frac{1}{p-1} \cdot e^{-2p} \Leftrightarrow e^2(1-e^{t-2}+e^{t-2}(t-2)) \cdot \sigma(t-2) = (e^2 - e^t + e^t(t-2)) \cdot \sigma(t-2).$$

Восстановив оригиналы для каждого слагаемого в $X(p)$, записываем оригинал $x(t)$, соответствующий всему изображению $X(p)$:

$$x(t) = (e^2 + e^t \cdot (t-3)) \cdot \sigma(t-2) + (-1+2e^t) \cdot \sigma(t).$$

Искомое решение задачи Коши для данного ОДУ найдено. Остаётся только подтвердить его проверкой. Начинать проверку рекомендуется с проверки начальных условий, как их проверить проще с учётом следующих двух очевидных фактов относительно единичной функции Хевисайда:

- значение $\sigma(t-2)$ при значении $t=0$ равно нулю,
- при дифференцировании эта функция ведёт себя как постоянная.

Тогда легко видеть, что оба начальные условия выполняются: $x(0)=1$, $x'(0)=2$. Теперь нужно дифференцировать дважды функцию $x(t)$ и подставлять $x''(t)$, $x'(t)$ в исходное ОДУ:

$$x'(t) = e^t(t-2) \cdot \sigma(t-2) + 2e^t \cdot \sigma(t);$$

$$x''(t) = e^t(t-1) \cdot \sigma(t-2) + 2e^t \cdot \sigma(t);$$

$$\text{ОДУ: } x'' - x' = e^t \cdot \sigma(t-2) \Rightarrow \sigma(t-2) \cdot e^t(t-1-t+2) + \sigma(t) \cdot e^t(2-2) = \sigma(t-2) \cdot e^t$$

- уравнение тоже удовлетворяется, следовательно, его частное решение найдено верно.

$$2) \begin{cases} x' + 4x = y \\ y' + y = -2x; \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 3.$$

Пусть $x(t) \Leftrightarrow X(p)$, $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$;

Тогда $x'(t) \Leftrightarrow pX - x(0) = pX - 2$, $y'(t) \Leftrightarrow pY - y(0) = pY - 3$.

Система операционных уравнений, соответствующих дифференциальным уравнениям данной системы, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} pX - 2 + 4X = Y \\ pY - 3 + Y = -2X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \cdot (p+4) - Y = 2 \\ 2X + Y \cdot (p+1) = 3 \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера, так как она является системой линейных алгебраических уравнений относительно X и Y :

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+4 & -1 \\ 2 & p+1 \end{vmatrix} = (p+4)(p+1)+2 = p^2+5p+6 = (p+2)(p+3);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & p+1 \end{vmatrix} = 2p+2+3 = 2p+5; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p+4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3p+12-4 = 3p+8;$$

$$X = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2p+5}{(p+2)(p+3)}; \quad Y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3p+8}{(p+2)(p+3)}.$$

Для восстановления оригиналов $x(t)$ и $y(t)$ представим их изображения $X(p)$ и $Y(p)$ в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$X(p) = \frac{2p+5}{(p+2)(p+3)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+3} \Rightarrow 2p+5 = A(p+3) + B(p+2) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{при } p = -3: \quad -1 = -B &\Rightarrow B = 1 \\ \text{при } p = -2: \quad 1 = A &\Rightarrow A = 1 \end{aligned} \Rightarrow X(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} \propto (e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(t) = x(t);$$

$$Y(p) = \frac{3p+8}{(p+2)(p+3)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+3} \Rightarrow 3p+8 = A(p+3) + B(p+2) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{при } p = -3: \quad -1 = -B &\Rightarrow B = 1 \\ \text{при } p = -2: \quad 2 = A &\Rightarrow A = 2 \end{aligned} \Rightarrow Y(p) = \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+3} \propto (2e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(t) = y(t).$$

Проверка:

$$\begin{cases} x(t) = (e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(t) \\ y(t) = (2e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 2 - \text{верно}; \\ y(0) = 3 - \text{верно}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = (-2e^{-2t} - 3e^{-3t})\sigma(t) \\ y'(t) = (-4e^{-2t} - 3e^{-3t})\sigma(t) \end{cases}$$

Проверяем по очереди каждое уравнения исходной системы ДУ, при этом множитель $\sigma(t)$ можно при подстановке опустить, так этот множитель является общим для всех слагаемых:

$$\begin{aligned} x' + 4x = y &\Rightarrow -\underline{2}e^{-2t} - \underline{3}e^{-3t} + \underline{4}e^{-2t} + \underline{4}e^{-3t} = 2e^{-2t} + e^{-3t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2e^{-2t} + e^{-3t} = 2e^{-2t} + e^{-3t} - \text{верно при } \forall t; \end{aligned}$$

$$y' + 4y = -2x \Rightarrow -\underline{4}e^{-2t} - \underline{3}e^{-3t} + \underline{2}e^{-2t} + \underline{e}^{-3t} = -2(e^{-2t} + e^{-3t}) - \text{верно при } \forall t.$$

Ответ к заданию 6: 1) $x(t) = (e^2 + e^t \cdot (t-3)) \cdot \sigma(t-2) + (-1 + 2e^t) \cdot \sigma(t)$;

$$2) \begin{cases} x(t) = (e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(t) \\ y(t) = (2e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(t) \end{cases}.$$

Приложение А. Варианты заданий

Задание 1. Определить тип обыкновенного дифференциального уравнения, найти его общее решение и найти частное решение, если поставлены начальные условия.

№ вар.	Диф. уравнения 1.1, 1.2, 1.3.	Диф. уравнения 1.4, 1.5, 1.6
1	<p>1.1. $(x+y)dx = (2x-2y)dy$, $y _{x=2} = -1$;</p> <p>1.2. $y' - \frac{y}{x} = y^2\sqrt{x^2+4}$, $y _{x=1} = 1$;</p> <p>1.3. $x^4y'' + x^3y' = 4$;</p>	<p>1.4. $y'' + 3y' - 4y = 3\sin 2x$, $y _{x=0} = 2$, $y' _{x=0} = 0$;</p> <p>1.5. $y'' - 4y' = 16\operatorname{ch} 4x$;</p> <p>1.6. $y'' + 3y' - 4y = xe^{-4x} + 5e^x$</p>
2	<p>1.1. $y' + \frac{y}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{\sqrt{(x+2)(x+4)}}$ $y _{x=-1} = \sqrt{3}$;</p> <p>1.2. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$, $y _{x=1} = 3$, $y' _{x=1} = 0$;</p> <p>1.3. $2x + 2xy + (2-x^2)y' = 0$;</p>	<p>1.4. $y'' + 9y = \cos 2x$, $y _{x=0} = 3$, $y' _{x=0} = 0$;</p> <p>1.5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4x+1}}$;</p> <p>1.6. $y'' - 9y = e^{-3x} \cdot (x-2) - \cos 3x$</p>
3	<p>1.1. $y' - \frac{y}{x} = y^2\sqrt{x^2+4}$, $y _{x=1} = 1$;</p> <p>1.2. $(x^2 + 4xy + 5y^2)dx = (6x^2 + 4xy)dy$;</p> <p>1.3. $y'' - \frac{6x^2y'}{x^3+1} = (x^3 + 1)^2$;</p>	<p>1.4. $y'' + 25y = e^{5x}(1-x)$, $y _{x=0} = 2$, $y' _{x=0} = 0$;</p> <p>1.5. $y'' - 4y' = 2\operatorname{ch} 2x$;</p> <p>1.6. $y'' + 25y = 4\cos 5x - x$, $y _{x=\pi} = 5$, $y' _{x=\pi} = 0$;</p>
4	<p>1.1. $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{2y}$;</p> <p>1.2. $y' = \frac{2y-x}{2x+y}$, $y _{x=1} = 0$;</p> <p>1.3. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos^3 x$;</p>	<p>1.4. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(x-3)$, $y _{x=0} = 0$, $y' _{x=0} = -2$;</p> <p>1.5. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}(x^2 + 3x - 1)}{x}$;</p> <p>1.6. $y'' + 25y = y \sin x + 4x^2$, $y _{x=\pi} = 3$, $y' _{x=\pi} = -1$;</p>
5	<p>1.1. $y^3y' + \frac{y^4}{2x} = \frac{\sin x}{x}$, $y _{x=\frac{\pi}{2}} = 0$;</p>	<p>1.4. $y'' + 3y' - 4y = 5e^x \cos x$, $y _{x=0} = 1$, $y' _{x=0} = -2$;</p>

	<p>1.2. $y' = \frac{2y+x}{2x-y}, \quad y _{x=1} = 1;$</p> <p>1.3. $y'' \sin y = (y')^2;$</p>	<p>1.5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 4x}};$</p> <p>1.6. $y'' + y = e^{-x} - 2\sin x.$</p>
6	<p>1.1. $(3e^x \operatorname{tg}^2 y)dx + (1 - e^x)dy = 0;$</p> <p>1.2. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y _{x=\sqrt{3}} = 1;$</p> <p>1.3. $y'' - \frac{y'}{x} = x \arcsin x$ $y _{x=1} = 0, \quad y' _{x=1} = \frac{\pi}{2};$</p>	<p>1.4. $y'' - 2y' + y = xe^x,$ $y _{x=0} = 2, \quad y' _{x=0} = 0;$</p> <p>1.5. $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{1 + e^x};$</p> <p>1.6. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x - 3e^{2x}$</p>
7	<p>1.1. $y' + \frac{4y}{4x+1} = y^3(4x+1), \quad y _{x=1} = 2;$</p> <p>1.2. $y' = \frac{x \sin x}{\cos^3 y}, \quad y _{x=\pi} = 2\pi;$</p> <p>1.3. $y'' + \frac{2y'}{\sin 2x} = \cos x;$</p>	<p>1.4. $y'' + y = -\cos 2x,$ $y _{x=0} = 1, \quad y' _{x=0} = 0;$</p> <p>1.5. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x;$</p> <p>1.6. $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}(x^2 - 4) + 7e^x$</p>
8	<p>1.1. $\sqrt{4-x^2} dx - xy\sqrt{1-y^2} dy = 0;$</p> <p>1.2. $xy' - y = xe^{-\frac{y}{x}}, \quad y _{x=1} = 0;$</p> <p>1.3. $y'' - \frac{y'}{\sin x} = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos^3(\frac{x}{2})};$</p>	<p>1.4. $y'' + y = x^3 + 1,$ $y _{x=0} = 2, \quad y' _{x=0} = 0;$</p> <p>1.5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4x+1}};$</p> <p>1.6. $y'' - 4y' - 5y = (2x+1)e^{5x} - 2\cos x$</p>
9	<p>1.1. $y' + \frac{y}{x} = y^2 x \sin x, \quad y _{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi};$</p> <p>1.2. $x^2 y' = xy + y\sqrt{y^2 - 4xy},$ $y _{x=1} = 4;$</p> <p>1.3. $(y-4)(y-3)y'' = (y')^2;$</p>	<p>1.4. $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x,$ $y _{x=0} = -1, \quad y' _{x=0} = 2;$</p> <p>1.5. $y'' + 4y = 4 \operatorname{tg} 2x;$</p> <p>1.6. $y'' + 4y = \cos 2x - 3\sin 2x - 4e^{2x}$</p>
10	<p>1.1. $(2\sqrt{x} - \sqrt{y})\sqrt{y}dx + xdy = 0, \quad y _{x=1} = 1;$</p> <p>1.2. $y' = xy^2 - 9x - 2y^2 + 18, \quad y _{x=3} = -4;$</p> <p>1.3. $y'' + \frac{xy'}{x^2 + 4} = x, \quad y _{x=0} = 1, \quad y' _{x=0} = 0;$</p>	<p>1.4. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10);$</p> <p>1.5. $y'' + 9y = \frac{2}{\cos^2 3x};$</p> <p>1.6. $y'' + 9y = \sin 3x - \cos 3x + 5e^{-3x}$</p>
11	<p>1.1. $y' + \frac{y}{x} = y^2(1+x^2), \quad y _{x=1} = 2;$</p> <p>1.2. $3xy^2 dy - (2y^3 + x^3)dx = 0;$</p>	<p>1.4. $y'' + 4y' - 5y = xe^x,$ $y _{x=0} = 0, \quad y' _{x=0} = 2;$</p>

	1.3. $y'' - \frac{2\sin x}{\cos x + 1} y' = \sin x,$ $y _{x=2\pi} = -1, y' _{x=2\pi} = 0;$	1.5. $y'' + 4y' + 4y = \frac{xe^{-2x}}{x^2 + 4};$ 1.6. $y'' + y = \sin 3x - 4\cos 3x - 3e^{-x}$
12	1.1. $xy' - y = \sqrt{2xy + y^2};$ 1.2. $y^5 y' - \frac{y^6}{x} = x^5 \ln x, y _{x=1} = 2;$ 1.3. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos^2 x,$ $y _{x=\pi} = 0, y' _{x=\pi} = -1;$	1.4. $y'' + 4y = 2\sin 2x - \cos 2x,$ $y _{x=0} = 3, y' _{x=0} = 1;$ 1.5. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x};$ 1.6. $y'' - 4y' - 5y = (x+1)e^{2x} + 3e^{-x}$
13	1.1. $y' = xy^2 - y^2 - 6y + 6xy;$ 1.2. $(2x^2 y + xy^2 + y^3)dx - (2x^3 + x^2 y)dy = 0,$ $y _{x=1} = -1;$ 1.3. $y'' = \frac{y'}{x} + x \cos^2 x,$ $y _{x=\pi} = 1, y' _{x=\pi} = -2;$	1.4. $y'' - y' = x^2 e^{-x},$ $y _{x=0} = 0, y' _{x=0} = 2;$ 1.5. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}};$ 1.6. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \cos x + xe^x$
14	1.1. $y^4 y' - \frac{y^5}{5x} = (\ln x - 3)^5, y _{x=1} = 2;$ 1.2. $xy' - y = \sqrt{10x^2 + 2xy + y^2};$ 1.3. $y''(1+y^4) + 4y^3(y')^2 = 0,$ $y _{x=0} = 1, y' _{x=0} = 2;$	1.4. $y'' + 3y' - 4y = (x+2)e^x,$ $y _{x=0} = 0, y' _{x=0} = 1;$ 1.5. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x};$ 1.6. $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x} \cos x + xe^{-3x}$
15	1.1. $x^2 y' = 2xy - 3, y _{x=-1} = 1;$ 1.2. $y'(2y-x) = y + 2x;$ 1.3. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1,$ $y _{x=\frac{\pi}{4}} = 0, y' _{x=\frac{\pi}{4}} = -1;$	1.4. $y'' - 3y' + 2y = e^x x^2,$ $y _{x=0} = 2, y' _{x=0} = 0;$ 1.5. $y'' + 8y' + 16y = \frac{e^{-4x}}{x^2 - 9};$ 1.6. $y'' + 9y = 5\sin x - 3\cos x + e^{3x};$
16	1.1. $y' \cos x + y \sin x = 1, y _{x=\pi} = 1;$ 1.2. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0;$ 1.3. $2yy'' = 1 + (y')^2;$	1.4. $y'' + 25y = \cos 2x + 2\sin 2x,$ $y _{x=0} = 2, y' _{x=0} = -1;$ 1.5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x-4};$ 1.6. $y'' - 4y' = x^2 + 3x - 1,$ $y _{x=1} = 0, y' _{x=1} = 0$
17	1.1. $(x^2 + 2y^2)dx = (2x^2 + y^2)dy, y _{x=-2} = 0;$	1.4. $y'' + 4y' - 5y = 2\cos 2x,$

	1.2. $y^4 y' - \frac{y^5}{5x} = (\ln x - 3)^5, y _{x=1} = 3;$ 1.3. $x^4 y'' + x^3 y' = 4;$	$y _{x=0} = -2, y' _{x=0} = 1;$ 1.5. $y'' - 4y' = 5sh4x;$ 1.6. $y'' + 6y' + 9y = -xe^{3x} + \cos 3x$
18	1.1. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln^2 x, y _{x=1} = 4;$ 1.2. $(x^2 + y^2)dx - (x + y)xdy = 0;$ 1.3. $y'' = ctg^2 x,$ $y _{x=\frac{\pi}{2}} = 8, y' _{x=\frac{\pi}{2}} = -1;$	1.4. $2y'' - y' - y = 3xe^{2x},$ $y _{x=0} = 1, y' _{x=0} = -2;$ 1.5. $y'' - 8y' + 16y = \frac{(x+2)e^{4x}}{x^2 - 1};$ 1.6. $y'' + 16y = 3\cos 4x + e^{2x}$
19	1.1. $y' - \frac{y}{x} = y^2 \sqrt{x^2 + 4}, y _{x=1} = 0;$ 1.2. $y \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) dx + xdy = 0, y _{x=2} = 2;$ 1.3. $x^5 y'' + x^4 y' = 0;$	1.4. $y'' + 7y' - 8y = \sin x,$ $y _{x=0} = 3, y' _{x=0} = -2;$ 1.5. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{4x+1}};$ 1.6. $y'' + 4y' = x^2 - 4x + 3 + 2e^x$
20	1.1. $y' = xy^2 - 9x - 2y^2 + 18, y _{x=3} = 5;$ 1.2. $3xy^2 dy - (2y^3 + x^3)dx = 0, y _{x=1} = 3;$ 1.3. $y'' + \frac{xy'}{x^2 + 4} = x, y _{x=0} = 2, y' _{x=0} = 1;$	1.4. $y'' - 3y' + 2y = e^x (4x + 2);$ 1.5. $y'' + 4y = \frac{3}{\cos^2 2x};$ 1.6. $y'' + 4y' + 4 = 3\cos 2x + e^{-2x}$

Задание 2. Решите систему линейных дифференциальных уравнений двумя методами: методом исключения и матричным методом.

Задание 3. Постройте интегральные линии дифференциального уравнения первого порядка. Найдите уравнение интегральной линии, проходящей через заданную точку M_0 . Проанализируйте теорему существования и единственности частных решений данного ДУ.

№ Вариан	Задание 2	Задание 3
1	$\begin{cases} x'_t = 2y - 5x \\ y'_t = x - 6y \end{cases}$	$yy' = -2x, M_0(0;5)$
2	$\begin{cases} x'_t = 3x - y \\ y'_t = x + y \end{cases}$	$y' = \frac{2x}{3y}, M_0(1;1)$

3	$\begin{cases} x'_t = 2x + y \\ y'_t = 3x + 4y \end{cases}$	$xy' = 2y, \quad M_0(1;3).$
4	$\begin{cases} x'_t = 8y - x \\ y'_t = x + y \end{cases}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}, \quad M_0(2;2).$
5	$\begin{cases} x'_t = 3x + y \\ y'_t = -y + 3x \end{cases}$	$y' = \frac{2y}{\sin 2x}, \quad M_0\left(\frac{\pi}{4};1\right).$
6	$\begin{cases} x'_t = x - 3y \\ y'_t = x + 5y \end{cases}$	$y' \operatorname{tg} x - y = 0, \quad M_0\left(-\frac{\pi}{2};2\right).$
7	$\begin{cases} x'_t = 5x + y \\ y'_t = -3x + 9y \end{cases}$	$y' = \frac{y^2 - x^2}{2yx}, \quad M_0(1;2).$
8	$\begin{cases} x'_t = 3x + y \\ y'_t = x + 3y \end{cases}$	$\sqrt{1-x^2} dy = x dx, \quad M_0(0;-2).$
9	$\begin{cases} x'_t = 9x + 6y \\ y'_t = 2x + 8y \end{cases}$	$y'(x^2 - 4) = 2xy, \quad M_0(0;5).$
10	$\begin{cases} x'_t = x - 2y \\ y'_t = x + 4y \end{cases}$	$(xy - x^2)y' = x^2 + 2y^2 - 3xy, \\ M_0(1;0).$
11	$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y \\ y'_t = -2x + 11y \end{cases}$	$xy' + y = 0, \quad M_0(-2;4).$
12	$\begin{cases} x'_t = 8x + 2y \\ y'_t = -3x + 15y \end{cases}$	$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad M_0(2;0).$
13	$\begin{cases} x'_t = 7x - 5y \\ y'_t = -4x + 8y \end{cases}$	$xy' = x + 2y, \quad M_0(2;0).$
14	$\begin{cases} x'_t = 8x + 2y \\ y'_t = -3x + 15y \end{cases}$	$y' + y \operatorname{tg} x = 0, \quad M_0(\pi;-0.3).$
15	$\begin{cases} x'_t = 3x + y \\ y'_t = x + 3y \end{cases}$	$\sqrt{1-x^2} dy = x dx, \quad M_0(0;-2).$
16	$\begin{cases} x'_t = x - 2y \\ y'_t = x + 4y \end{cases}$	$y'(x^2 - 4) = 2xy, \quad M_0(0;5).$

17	$\begin{cases} x'_t = 8y - x \\ y'_t = x + y \end{cases}$	$\sqrt{1-x^2} dy = x dx, \quad M_0(0;4).$
18	$\begin{cases} x'_t = 7x - 5y \\ y'_t = -4x + 8y \end{cases}$	$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad M_0(-3;1).$
19	$\begin{cases} x'_t = 3x - y \\ y'_t = x + y \end{cases}$	$y' = \frac{2x}{3y}, \quad M_0(-1;2).$
20	$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y \\ y'_t = -2x + 11y \end{cases}$	$\sqrt{1-x^2} dy = x dx, \quad M_0(0;3).$

Задание 4.

Найдите изображения по Лапласу функций-оригиналов, заданных при значениях $t \geq 0$.

Задание 5. Восстановите функции-оригиналы, если даны их изображения по Лапласу.

вар.	Задание 4	Задание 5
1	1) $f(t) = \sin 2t \cdot \cos 5t$; 2) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t \leq 3 \\ 3, & t > 3 \end{cases}$ 3) $f(t) = 2(2-t), t \in [0;2]$, периодическая с $T=2$.	1) $F(p) = \frac{4p+2}{p^2+2p+8} \cdot e^{-2p}$; 2) $F(p) = \frac{1}{p^3-2p^2-3p}$; 3) $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$ - с помощью свертки.
2	1) $f(t) = \sin^4 t$; 2) $f(t) = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 4 \\ 2, & t > 4 \end{cases}$ 3) $f(t) = 2t, t \in [0;2]$, периодическая с $T=2$.	1) $F(p) = \frac{p}{p^2-5p+12} \cdot e^{-p}$; 2) $F(p) = \frac{p-2}{(p^2-1)(p+3)}$; 3) $F(p) = \frac{1}{p^3(p-3)}$ - с помощью свертки.
3	1) $f(t) = \sin^2 3t$; 2) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \pi < t \leq 2\pi \\ 1, & t > 2\pi \end{cases}$; 3) $f(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in [0;1] \\ 0, & t \in (1;2] \end{cases}$, периодическая с $T=2$.	1) $F(p) = \frac{p+1}{p^2-2p+5} \cdot e^{-3p}$; 2) $F(p) = \frac{p^2+3}{p^3-2p^2-3p}$; 3) $F(p) = \frac{2}{p^2(p^2-9)}$ - с помощью свертки.

4	<p>1) $f(t) = t \cdot \sin^2 2t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 4 \\ 2, & t \geq 4 \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = e^t, t \in [0;1]$, периодическая с $T=1$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{1}{p^2 - 4p + 7} \cdot e^{-p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{1-p}{(p^2 - 4)(p+1)}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)}$ - с помощью свертки.</p>
5	<p>1) $f(t) = t \sin t \cdot \sin 5t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 3 \\ 4, & t > 3 \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = 2t, t \in [0;1]$, периодическая с $T=1$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{5p+2}{p^2 - 2p + 8} \cdot e^{-3p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 - 3p}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{p}{(p^2 - 1)(p - 2)}$ - с помощью свертки.</p>
6	<p>1) $f(t) = \cos^4 t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 3 \\ 3, & t > 3 \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = 2-t, t \in [0;2]$, периодическая с $T=2$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{p}{p^2 + 5p + 15} \cdot e^{-p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{p-2}{(p^2 - 9)(p+2)}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{1}{p^2(p-4)}$ - с помощью свертки.</p>
7	<p>1) $f(t) = ch^2 3t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \pi < t \leq 2\pi \\ -1, & t > 2\pi \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in [0;1] \\ 1, & t \in (1;2] \end{cases}$, периодическая с $T=2$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{p+1}{p^2 + 2p + 6} \cdot e^{-2p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{p^2 - 3}{p^3 + 2p^2 - 3p}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{2}{p^2(p^2 + 9)}$ - с помощью свертки.</p>
8	<p>1) $f(t) = t \cdot sh^2 t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3 \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = e^t, t \in [0;2]$, периодическая с $T=2$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{1-p}{p^2 + 4p + 8} \cdot e^{-p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{3-p}{(p^2 - 1)(p+4)}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{2}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)}$ - с помощью свертки.</p>
9	<p>1) $f(t) = t \sin^2 t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 4 \\ 2, & t > 4 \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = 1+t, t \in [0;2]$, периодическая с $T=2$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{p-4}{p^2 - 5p + 15} \cdot e^{-p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{p+2}{(p^2 - 1)(p-4)}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4)}$ - с помощью свертки.</p>

10	<p>1) $f(t) = \sin 2t \cdot \sin 5t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t \leq 3 \\ 4, & t > 3 \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = 2(1-t), t \in [0;1]$, периодическая с $T=1$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{4p+2}{p^2+2p+8} \cdot e^{-p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{1}{p^3+2p^2-3p}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$ - с помощью свертки.</p>
11	<p>1) $f(t) = t \cdot ch^2 2t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3 \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = e^{1+t}, t \in [0;1]$, периодическая с $T=1$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{2-p}{p^2+4p+13} \cdot e^{-p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{4-p}{(p^2-1)(p-3)}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{2}{(p^2+4)(p^2+9)}$ - с помощью свертки.</p>
12	<p>1) $f(t) = t \cdot \sin^2 2t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 4 \\ 2, & t \geq 4 \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = e^t, t \in [0;1]$, периодическая с $T=1$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{p+1}{p^2+2p+6} \cdot e^{-2p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{p^2-3}{p^3+2p^2-3p}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{2}{p^2(p^2+9)}$ - с помощью свертки.</p>
13	<p>1) $f(t) = t \sin t \cdot \sin 5t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \leq 3 \\ 4, & t > 3 \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = 2t, t \in [0;1]$, периодическая с $T=1$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{2-p}{p^2+4p+13} \cdot e^{-p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{4-p}{(p^2-1)(p-3)}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{2}{(p^2+4)(p^2+9)}$ - с помощью свертки.</p>
14	<p>1) $f(t) = t \cdot sh^2 t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3 \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = e^t, t \in [0;2]$, периодическая с $T=2$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{4p+2}{p^2+2p+8} \cdot e^{-2p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{1}{p^3-2p^2-3p}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$ - с помощью свертки.</p>
15	<p>1) $f(t) = ch^2 3t$;</p> <p>2) $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \pi < t \leq 2\pi \\ -1, & t > 2\pi \end{cases}$;</p> <p>3) $f(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in [0;1] \\ 1, & t \in (1;2] \end{cases}$, периодическая с $T=2$.</p>	<p>1) $F(p) = \frac{p}{p^2-5p+12} \cdot e^{-p}$;</p> <p>2) $F(p) = \frac{p-2}{(p^2-1)(p+3)}$;</p> <p>3) $F(p) = \frac{1}{p^3(p-3)}$ - с помощью свертки.</p>

16	1) $f(t) = \sin 3t \cdot \sin 5t$; 2) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t \leq 3 \\ -1, & t > 3 \end{cases}$; 3) $f(t) = 2(1-t), t \in [0;1]$, периодическая с $T=1$.	1) $F(p) = \frac{p}{p^2 + 5p + 15} \cdot e^{-p}$; 2) $F(p) = \frac{p-2}{(p^2-9)(p+2)}$; 3) $F(p) = \frac{1}{p^2(p+4)}$ - с помощью свертки.
17		
18		
19		
20		

Задание 6

Решите операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и для системы обыкновенных ДУ; ответы подтвердите проверками.

№ вар.	Задание 6 (диф. уравнение)	Задание 6 (система ДУ)
1	$x'' + 3x' + 2x = 3t\sigma(t-1), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1$	$\begin{cases} x' = x - 2y + e^t \\ y' = x - y \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -2.$
2	$x'' - 4x' + 4x = e^t\sigma(t-1), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 3$	$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y + t \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$
3	$x'' + x = e^{-t}\sigma(t-2), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$	$\begin{cases} x' = -4x + y \\ y' = -2x - y \end{cases}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 3.$
4	$x'' + x = -t \cdot \sigma(t-1), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$	$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y + e^t \end{cases}, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = -3.$
5	$x'' - 6x' + 9x = -t \cdot \sigma(t-2), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$	$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y + e^{-t} \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$
6	$x'' + 9x = -\sigma(t-3), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$	$\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t \\ y' = -x - 2y + \sin t \end{cases}, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$
7	$x'' - 4x' + 5x = \cos t \cdot \sigma(t-\pi), \quad x(0) = 0, \\ x'(0) = 1.$	$\begin{cases} x' = x + 2y + t \\ y' = x - y \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$
8	$x'' + 6x' + 9x = 3t\sigma(t-0,5), \quad x(0) = 0, \\ x'(0) = -2.$	$\begin{cases} x' = 2x + 4y - \cos t \\ y' = -x - 2y \end{cases}, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

9	$x'' - 8x' - 9x = \sin t \cdot \sigma(t - \pi), \quad x(0) = 0, \\ x'(0) = -1.$	$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x - y + 2t \end{cases}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$
10	$x'' - 6x' - 7x = t\sigma(t - 1,5), \quad x(0) = 0, \\ x'(0) = 1.$	$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y - 4 \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$
11	$x'' + x' = t^2\sigma(t - 1), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -2$	$\begin{cases} x' = 2y - 3x & x(0) = 0 \\ y' = y - 2x - t & y(0) = 3 \end{cases}$
12	$x'' - 4x' + 5x = \cos t \cdot \sigma(t - \frac{\pi}{2}), \quad x(0) = 0, \\ x'(0) = 1.$	$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y + e^{-t} \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$
13	$x'' - 6x' + 9x = -t \cdot \sigma(t - 2), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$	$\begin{cases} x' = 2x + 4y - \cos t \\ y' = -x - 2y \end{cases}, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
14	$x'' + 9x = -\sigma(t - 3), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$	$\begin{cases} x' = x - 2y + e^t \\ y' = x - y \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -2.$
15	$x'' + x = -t \cdot \sigma(t - 1), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$	$\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t \\ y' = -x - 2y + \sin t \end{cases}, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$
16	$x'' + 4x = \sigma(t - 2), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4.$	$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y + e^{-t} \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -2.$
17		
18		
19		
20		

Приложение Б. Образец оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГАОУ ВО «Мурманский государственный технический университет»

Кафедра цифровых технологий,
математики и экономики

Контрольная работа

«Обыкновенные ДУ и системы ДУ»

по дисциплине «Специальные разделы высшей математики»

выполнил: студент группы ИВТб-20о

Сумин И.А.

проверил: доцент Кацуба В.С.

оценка: _____

дата: _____

Мурманск, 2022